Uebungen zu Operations Research, Blatt 4

SoSe 2011 Mo. 15.15 - 16.45, S 107, Prof.Dr. Alfio Borzì

MATLAB Übungen an: johannes.oehrlein@stud-mail.uni-wuerzburg.de

(1) Betrachten Sie das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b,\, x \geq 0\}$ in Normalform mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ sowie $Rang(A) = p \leq m$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien etwa die ersten p Zeilenvektoren $a_1^T, \ldots, a_p^T$ von A linear unabhängig. Setze

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -a_1^T- \\ \vdots \\ -a_p^T- \end{pmatrix} \qquad \text{and } \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

und $\bar{P} = \{x \in \mathbb{R}^n | \bar{A}x = \bar{b},\, x \geq 0\}$.

Zeigen Sie folgendes. Ist P nichtleer, so gilt $P = \bar{P}$.

(2) Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Nach dem Alternativsatz von Farkas ist dann entweder das System $Ax = b$, $x \geq 0$ lösbar, oder das System $y^T A \leq 0$, $y^T b > 0$ hat eine Lösung. Beweisen Sie hiermit die Gültigkeit der folgenden Alternativsätze:

(a) Alternativsatz von Gale I: Entweder ist das System $Ax \geq b$, $x \geq 0$ lösbar, oder das System $y^T A \leq 0$, $y^T b > 0$, $y \geq 0$ hat eine Lösung.

(b) Alternativsatz von Gale II: Entweder ist das System $Ax \geq b$ lösbar, oder das System $y^T A = 0$, $y^T b > 0$, $y \geq 0$ hat eine Lösung.

(3) Beweisen Sie hiermit die Gültigkeit der folgenden Alternativsätze:

(c) Alternativsatz von Gordan: Entweder ist das System $Ax > 0$ lösbar, oder das System $y^T A = 0$, $y \geq 0$, $y \neq 0$ hat eine Lösung.

(d) Alternativsatz von Ville: Entweder ist das System $Ax > 0$, $x > 0$ lösbar, oder das System $y^T A \leq 0$, $y \geq 0$, $y \neq 0$ hat eine Lösung.

(4) Beweisen Sie die Aussage (b) des Existenzsatzes aus der Vorlesung: Ist $\sup(D) \in \mathbb{R}$, so besitzt das duale lineare Programm

$$\max b^T y \quad \text{u.d.N. } A^T y + s = c,\ s \geq 0$$

eine Lösung.

(5) Verwenden Sie die Lagrange Funktion um folgendes Problem zu lösen

$$\begin{array}{rcl} \min x_1 + x_2 - x_3 & & \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ x_1^2 + x_2^2 & = & 4 \\ x_1,\, x_2.\, x_3 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$